

## OTIMIZAÇÃO DE FORMA E DIMENSIONAL DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

**Nederson da Silva Koehler**

Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. de Engenharia Mecânica  
Cx. P. 476 – 88040-900 – Florianópolis, SC, Brasil

**Marcelo Krajnc Alves**

Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. de Engenharia Mecânica  
Cx. P. 476 – 88040-900 – Florianópolis, SC, Brasil

***Resumo.** Neste trabalho apresenta-se os resultados da aplicação de algoritmos numéricos clássicos de programação matemática não-linear padrão à análise estrutural para a otimização de forma e dimensional de estruturas treliçadas. A formulação do problema envolve a minimização do peso da estrutura que está sujeita a restrições de área, de deslocamentos, de tensão, estabilidade e posição nodal. De modo a resolver os problemas propostos, foram aplicados o método do Lagrangeano aumentado e o método quase-Newton Broyden – Fletcher – Goldfarb e Shanno, conhecido como BFGS -. Ao final são apresentados dois exemplos que demonstram a eficiência e confiabilidade dos resultados.*

***Palavras-chave:** Otimização, Estruturas, Elementos finitos.*

### 1. INTRODUÇÃO

Na atualidade, é de grande importância o desenvolvimento de projetos de estruturas treliçadas que apresentam um custo menor e que cumpram com segurança a finalidade para a qual se destinam. Assim, desenvolveu-se um conjunto de algoritmos utilizando-se métodos de otimização eficientes para tratar problemas com grande número de restrições que, para uma dada configuração estrutural fixa, otimiza as áreas da seção transversal dos elementos que compõe a estrutura e a posição de nós também escolhidos como variáveis de projeto.

Nos exemplos que serão apresentados, os valores inicializados para as áreas e para os nós da estrutura - projetos iniciais - são uma primeira tentativa que podem conduzir a uma solução mais ou menos rápida para o problema, e ainda, está claro que o resultado final dependendo do problema, pode nos levar a diferentes soluções em decorrência da eventualidade dos dados referentes a este primeiro projeto. A solução final é encontrada por um processo iterativo que melhora a função objetivo a cada passo, então a procura é terminada quando não obtemos uma redução considerável do valor da função objetivo sem violar as restrições. Neste trabalho o processo de otimização é encerrado quando são verificadas certas condições que devem ser satisfeitas para um ponto de mínimo de uma função, conhecidas como condições de Kuhn-Tucker que nos garante um ponto de mínimo para a função.

Nas próximas seções são apresentadas, a formulação para o problema geral de otimização e para o problema tratado neste artigo, os métodos utilizados para transformar o problema com restrições em um problema sem restrições, o algoritmo de otimização da classe quase-Newton, seguido da seção de exemplos de estruturas tratadas e da análise dos resultados obtidos.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Abaixo apresenta-se a forma geral do problema de otimização, e consiste em buscar um conjunto de valores para as variáveis de projeto que, para este caso, são as áreas e a posição nodal dos elementos que compõe a estrutura e que serão denominadas  $\mathbf{x}$ , assim, colocando-se o problema em sua forma usual temos:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) \quad (1)$$

$$\text{Sujeita a } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2)$$

e restrições  $x_k^l \leq x_k \leq x_k^u$ , onde  $k = 1, n$  e  $n =$  número de variáveis de projeto.

onde  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é a restrição de desigualdade e  $x_k^l$  e  $x_k^u$  denotam respectivamente os valores inferior e superior das variáveis de projeto.

Objetivo é minimizar a massa da estrutura que é dada pela equação abaixo:

$$W = \sum_{i=1}^{N_m} \rho_i A_i L_i \quad (3)$$

onde,  $W$  é o peso total da estrutura a qual  $N_m$  é o número de membros e  $\rho_i$ ,  $A_i$  e  $L_i$  respectivamente são a densidade, a área da seção transversal e o comprimento do  $i$ -ésimo membro.

Para a tensão as restrições tem a seguinte forma:

$$\sigma_i^{max} \leq \sigma_{ik} \leq \sigma_i^{(U)} \quad (i = 1, \dots, N_m, k = 1, \dots, N_L) \quad (4)$$

e

$$\sigma_i^{max} = \max(\sigma_i^{(L)}, \sigma_{ib}) \quad (5)$$

onde:

$\sigma_{ik}$  é a tensão no  $i$ -ésimo membro devido a  $k$ -ésima condição de carregamento;

$\sigma_i^{(L)}$  representa o limite superior de tensão,  $N_L$  é o numero de condições de carregamento;

$\sigma_i^{max}$  representa o limite inferior de tensão, o qual é determinado a partir do máximo valor entre a tensão limite inferior  $\sigma_i^{(L)}$  e a tensão de flambagem,  $\sigma_{ib}$ , neste trabalho é definida por:

$$\sigma_{ib} = -\frac{k_i A_i}{L_i^2} \quad (6)$$

onde  $k_i$  é alguma constante determinada a partir da geometria da seção transversal, do módulo de elasticidade, e de um fator de segurança. Assim a expressão da equação (4) contém  $A_i$  e  $L_i$ , o limite inferior  $\sigma_i^{max}$  é geralmente função das variáveis de projeto.

As restrições de deslocamento são dadas por:

$$u_i^{(L)} \leq u_{ik} \leq u_i^{(U)} \quad (7)$$

onde  $u_{ik}$  é o  $i$ -ésimo grau de liberdade do vetor de deslocamento devido a  $k$ -ésima condição de carga. Os símbolos  $u_i^{(U)}$  e  $u_i^{(L)}$  são, respectivamente os limites superior e inferior para a restrição. As restrições com relação às variáveis de projeto área da seção transversal são dadas por:

$$\beta_i^{(L)} \leq \beta_i \leq \beta_i^{(U)} \quad (8)$$

onde  $\beta_i$  é a variável recíproca independente correspondente a área de seção transversal  $A_i$ , i.e.,

$$\beta_i = \frac{1}{A_i} \quad (9)$$

enquanto  $\beta_i^{(U)}$  e  $\beta_i^{(L)}$  são respectivamente os limites superior e inferior em  $\beta_i$ . Portanto,

$$\beta_i^{(U)} = \frac{1}{A_i^{(L)}} \quad \text{e} \quad \beta_i^{(L)} = \frac{1}{A_i^{(U)}} \quad (10)$$

onde  $A_i^{(U)}$  e  $A_i^{(L)}$  são respectivamente os limites superior e inferior de  $A_i$ .

E finalmente, para a posição nodal, as restrições tomam a seguinte forma:

$$Y_i^{(L)} \leq Y_i \leq Y_i^{(U)} \quad (11)$$

onde  $Y_i$  representa a coordenada nodal assumida como variável de projeto, enquanto  $Y_i^{(U)}$  e  $Y_i^{(L)}$ , são respectivamente, os limites superior e inferior para a restrição.

### 3. O MÉTODO DO MULTIPLICADOR

O problema de minimização acima pode ser dito resolvido quando torna-se conhecido o par ótimo  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  do problema, onde  $\mathbf{x}^*$  representa o valor ótimo das variáveis de projeto e  $\boldsymbol{\lambda}^*$  o valor ótimo dos multiplicadores de Lagrange.

Apesar de diferentes versões do método do multiplicador serem teoricamente possíveis, o seguinte algoritmo é utilizado para transformar o problema de programação matemática não linear geral das equações (1) e (2). Abaixo temos o algoritmo do método do multiplicador:

Passo 1: Selecionar um vetor de multiplicadores de Lagrange inicial  $\boldsymbol{\lambda}^0$  e um fator de resposta  $C^0 > 0$ .

Passo 2: Resolver o seguinte problema de otimização sem restrição com relação ao vetor de variáveis primais  $\mathbf{x}$ .

$$\text{Min}_x A(x, \lambda^k, C^k) \quad (12)$$

onde

$$A(x, \lambda^k, C^k) = f(x) + C^k \sum_{i=1}^m \psi_i \left[ g_i(x), \frac{\lambda_i^k}{C^k} \right] \quad (13)$$

e

$$\psi_i = \begin{cases} \frac{1}{2} g_i^2 + \frac{\lambda_i^k}{C^k} g_i & \text{se } g_i \geq -\frac{\lambda_i^k}{C^k} \\ \text{se não} \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_i^k}{C^k} \right)^2 \end{cases} \quad (14)$$

Passo 3: Suponha que um  $x^k$  resolve o passo anterior. Atualize  $\lambda^k$  por :

$$\lambda_i^{k+1} = \max(0, \lambda_i^k + C^k g_i(x)) \quad (i=1, \dots, m) \quad (15)$$

Passo 4: Se  $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k$  ( $i=1, \dots, m$ ), então pare.

A solução ótima  $(x^*, \lambda^*) = (x^k, \lambda^k)$  é obtida. Do contrário vá para o Passo 5.

Passo 5: Fazer  $\lambda_i^k = \lambda_i^{k+1}$  ( $i=1, \dots, m$ ). Se  $C^k \leq C^{max}$ , onde,  $C^{max}$  = algum valor grande especificado, incrementar  $C^k$  por

$$C^k = \gamma C^k \quad (16)$$

onde  $\gamma$  é o fator de atualização maior que, ou igual a unidade. Do contrário, vá para o passo 2 com  $k = k+1$ .

#### 4. O MÉTODO QUASI-NEWTON – BFGS

Teremos que resolver uma seqüência de problemas sem restrição definido pela equação (13). Para isto utilizaremos um método quase-Newton, este é um método intermediário entre o *steepest descent* e o método de Newton. Assumindo ser impraticável a determinação da matriz Hessiana, busca-se uma aproximação da inversa da matriz Hessiana pela utilização de informação de gradiente de pontos anteriores, do processo iterativo. O método utilizado é o BFGS. O algoritmo pode ser descrito como segue para um problema de minimização sem restrição:

$$\text{Min}_x f(x) \quad (17)$$

Passo 1: selecionar o ponto de projeto inicial  $x_0$  e inicializar  $S_0 = 1$  (matriz identidade).

Passo 2: calcular o  $\nabla f(x_0)$

Passo 3: determinar o tamanho do passo inicial  $\alpha^*$  pela solução de:

$$\text{Min}_{\alpha \geq 0} f(x_0 - \alpha S_0 \nabla f(x_0)) \quad (18)$$

aqui  $\bar{x}$  representa a solução.

Passo 4: calcular  $\nabla f(\bar{x})$ .

Passo 5: calcular

$$P = -\alpha S_0 \nabla f(x_0) \quad (19)$$

e

$$q = \nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x_0) \quad (20)$$

Passo 6: atualizar  $S_0$  por:

$$S_0 = S_0 - \left( \frac{S_0 q q^T S_0}{q^T S_0 q} \right) \frac{p^T q}{q^T S_0 q} + \frac{p p^T}{p^T q} \quad (21)$$

Passo 7: faça  $x_0 \leftarrow \bar{x}$  e  $\nabla f(x_0) \leftarrow \nabla f(\bar{x})$

vá para o passo 3.

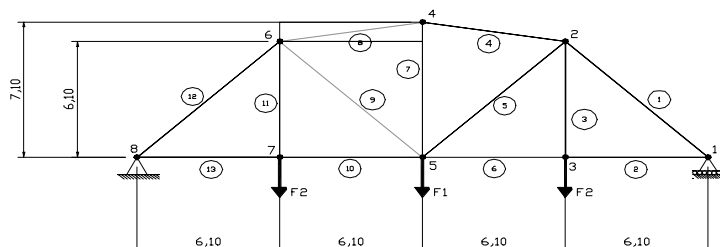
O termo  $p^T q / q^T S_0 q$  é somado à equação (21) para melhorar a estrutura de autovalores da matriz Hessiana do problema sem restrição. No presente trabalho, o algoritmo é terminado quando a diferença mínima entre dois multiplicadores de Lagrange é menor que 0.1%.

## 5. RESULTADOS

Nesta seção serão apresentadas as soluções de dois problemas de otimização para duas estruturas, uma com treze barras e outra com dezoito barras.

### 5.1 Estrutura de treze Barras

Abaixo temos a estrutura de treze barras, submetida à restrições de área, tensão e coordenadas



**Figura 1** - Representação esquemática da estrutura de treze barras inicial.

Abaixo temos alguns dados para a estrutura:

Material:	alumínio
Módulo de Elasticidade:	71 GPa
massa específica	2700 kg/m <sup>3</sup>
Tensão Admissível	±172,36 MPa
Área Mínima	64,5 mm <sup>2</sup>
Carga aplicada(F1)	88,96 kN
Carga aplicada(F2)	44,48 kN

Os grupos das variáveis área, são formados pelos seguintes elementos:

Grupo 1= A<sub>1</sub>, A<sub>12</sub>, Grupo 2= A<sub>2</sub>, A<sub>13</sub>, Grupo 3= A<sub>3</sub>, A<sub>11</sub>, Grupo 4= A<sub>4</sub>,A<sub>8</sub>, Grupo 5= A<sub>5</sub>, A<sub>9</sub>, Grupo 6= A<sub>6</sub>, A<sub>10</sub>, e Grupo 7= A<sub>7</sub>.

Os grupos das variáveis coordenada, são formados pelos seguintes elementos:

$$X_2 = -X_6, Y_2 = Y_6, e Y_4.$$

Os valores iniciais das áreas dos elementos da estrutura são 3200 mm<sup>2</sup>. O limite inferior da restrição de área é 64,50 mm<sup>2</sup>. Já o limite superior para X<sub>2</sub> = 12.192, e Y<sub>2</sub> = Y<sub>4</sub> = 25,4.

Na seqüência pode-se observar as representações esquemáticas da estrutura inicial submetida ao processo de otimização fig.1 e a estrutura ao final do processo fig.2. As tabelas 1 e 2 apresentam os resultados obtidos por este trabalho e os resultados obtidos por Kanji Imai (1981).

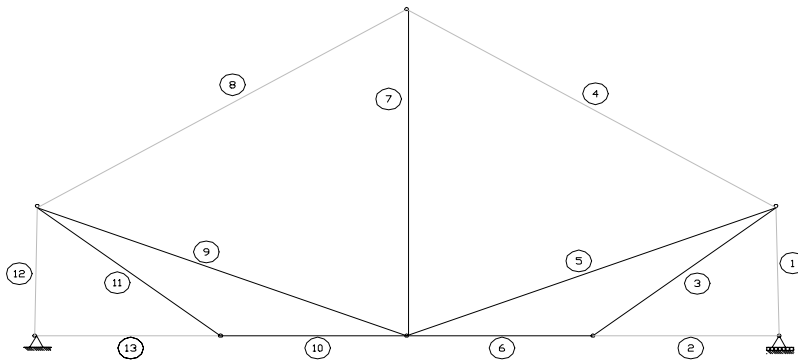
Na tabela abaixo estão os valores finais para as áreas após o processo de otimização.

**Tabela 1** - Valores das áreas ótimas ao final do processo de otimização.

Elementos	Área (mm <sup>2</sup> )	
	Autor	K. Imai
1, 12	645	645
2, 13	124	64,50
3, 11	509	465
4, 8	547	547
5, 9	64,50	64,50
6, 10	303	400
7	596	590
<b>Massa (kg)</b>	122,89	122,37

**Tabela 2** - Posição nodal ao final do processo de otimização.

Coordenada	Posição nodal	
	Autor	K. Imai
X <sub>2</sub> , -X <sub>6</sub>	12,10	11,65
Y <sub>2</sub> , Y <sub>6</sub>	4,98	5,34
Y <sub>4</sub>	12,70	12,85



**Figura 2** - Representação esquemática da estrutura de treze barras otimizada.

## 5.2 Estrutura de Dezoito Barras

Nesta estrutura foram aplicadas restrições de área, tensão, estabilidade e coordenadas nodais.

Abaixo temos alguns dados para a estrutura:

Material:	alumínio
Módulo de Elasticidade:	71 GPa
massa específica	2700 kg/m <sup>3</sup>
Tensão Admissível	±172,36 MPa
Área Mínima	64,5 mm <sup>2</sup>
Carga aplicada(P)	88,96kN
Coefficiente de flambagem	<b>k</b> = 27,6 Gpa

Os grupos das variáveis área, são formados pelos seguintes elementos:

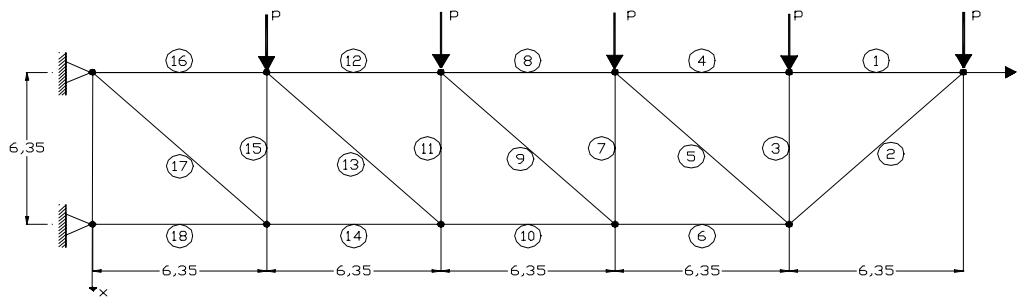
- Grupo 1 = A<sub>1</sub>, A<sub>4</sub>, A<sub>8</sub>, A<sub>15</sub>, A<sub>16</sub>
- Grupo 2 = A<sub>2</sub>, A<sub>6</sub>, A<sub>10</sub>, A<sub>14</sub>, A<sub>18</sub>
- Grupo 3 = A<sub>3</sub>, A<sub>7</sub>, A<sub>11</sub>, A<sub>15</sub>
- Grupo 4 = A<sub>5</sub>, A<sub>9</sub>, A<sub>13</sub>, A<sub>17</sub>

As variáveis coordenada, são formadas as seguintes:

- X<sub>3</sub>, Y<sub>3</sub>, X<sub>5</sub>, Y<sub>5</sub>, X<sub>7</sub>, Y<sub>7</sub>, X<sub>9</sub>, Y<sub>9</sub>

Os valores iniciais das áreas dos elementos da estrutura são 6450 mm<sup>2</sup>. O limite inferior da restrição de área é 64,50 mm<sup>2</sup>.

Na seqüência são apresentadas as representações esquemáticas da estrutura inicial submetida ao processo de otimização Fig. 3 e a estrutura otimizada ao final do processo Fig.4. As tabelas (4) e (5) apresentam os resultados obtidos por este trabalho e os resultados obtidos por Kanji Imai [1981].



**Figura 4-** Representação esquemática da estrutura inicial de dezoito barras.

Na tabela abaixo estão os valores finais para as áreas após o processo de otimização.

**Tabela 4-** Valores das áreas ótimas ao final do processo de otimização.

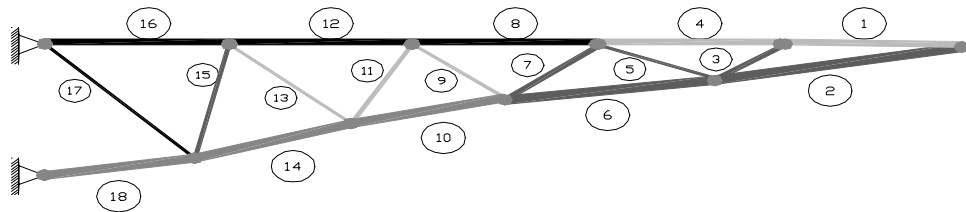
Elementos	Área (mm <sup>2</sup> )	
	Autor	K. Imai
1, 4, 8, 12, 16	8000	7250
2, 6, 10, 14, 18	11000	10100
3, 7, 11, 15	3400	5110
5, 9, 13, 17	2400	4190
<b>Massa (kg)</b>	2043,9	2117,32

Na tabela abaixo estão os valores das novas coordenadas.

**Tabela 5-** Posição nodal ao final do processo de otimização.

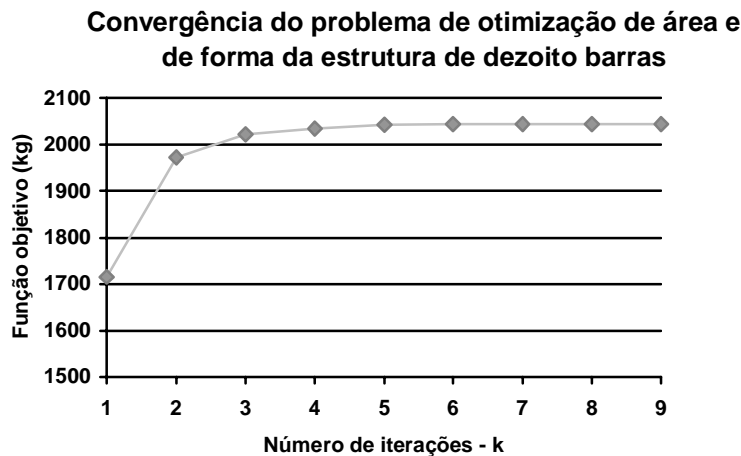
Coordenada	Posição nodal	
	Autor	K. Imai
X <sub>3</sub>	1,63	2,7
Y <sub>3</sub>	23,10	22,63
X <sub>5</sub>	2,60	3,67
Y <sub>5</sub>	15,87	15,44
X <sub>7</sub>	3,84	4,90
Y <sub>7</sub>	10,58	9,70
X <sub>9</sub>	5,52	6,43
Y <sub>9</sub>	5,20	4,60





**Figura 5** - Estrutura de dezoito barras otimizada.

No gráfico abaixo é apresentada a convergência do problema de otimização de área e de forma.



**Figura 6** - Gráfico da convergência do problema.

## 6. CONCLUSÃO

Para a estrutura de treze barras é importante ressaltar que, neste problema, as restrições de tensão foram todas satisfeitas no limite da tensão admissível, i.e., a convergência ocorre muito próxima da violação das restrições.

A estrutura de dezoito barras forneceu resultados que diferem dos resultados obtidos por K. Imai, para a otimização de dimensão e de forma. A função objetivo é inferior ao do trabalho de K. Imai em 3,32 %, porém é factível e satisfaz a condição necessária de ótimo, utilizada como critério de convergência. Esta solução, de fato, representa o mínimo local do problema.

Os algoritmos utilizados neste trabalho são muito eficientes para a otimização de estruturas treliçadas e que, apesar de serem realizadas várias análises por elementos finitos da estrutura durante todo o processo de otimização a convergência é obtida rapidamente.

## 7. REFERÊNCIAS

1. Arora, J. S., Introduction To Optimum Design, McGraw-Hill, USA, 1989.

2. Bazzaraa, M. S. & Shetti, C. M., Nonlinear Programming Theory And Algorithms, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
3. Fleury, C., Optimization Of Elastic Structures By Finite Elements, Aerospace Laboratory Of The University Of Liege, 1981.
4. Haftka, R. T. & Kamat, M. P., Elements of Structural Optimization, Netherlands, 1985.
5. Imai, Kanji, Configuration Optimization Of Trusses By The Multiplier Method, UCLA, Ph. D. thesis, 1981.
6. Vanderplaats. G. N., Numerical Optimization Techniques For Engineering Design, McGraw-Hill, 1984.

## **SHAPE AND DIMENSIONAL OPTIMIZATION OF TRUSS STRUCTURES**

***Abstract.** In this paper we present the results of the application of classical numerical algorithms of standard non-linear mathematical programming applied to the problem of shape and dimensional optimization of truss structures. The problem formulation holds the minimization of the mass of the structure which is subjected to restrictions of area, displacements, stress, stability and nodal positions. With the objective of solving the proposed problems, we applied the following methods: The Augmented Lagrangian Method (MLA) and the Quasi-Newton Method BFGS – Broyden - Fletcher - Galdfarb – Shanno. At the end, we present two examples to demonstrate the efficiency and reliability of the implemented algorithms.*

***Key Words:** Optimization, Structures, Finite element.*